EJE TEMÁTICO: MATEMÁTICA FINANCIERA
Elaborado por: Ing. Ivonne Puruncajas

1. Antecedentes

El presente documento contiene un breve resumen de algunos temas de matemática financiera que los estudiantes deben conocer en tercer nivel.

2. Matemática Financiera

> La Matemática Financiera es una derivación de la matemática aplicada que estudia el valor del dinero en el tiempo, combinando el capital, la tasa de interés y el tiempo para obtener un rendimiento o interés, a través de métodos de evaluación que permiten tomar decisiones de inversión. (Achign, 2015)

La Matemática Financiera se relaciona multidisciplinariamente con la contabilidad, derecho, economía, ciencia política, informática, finanzas entre otras.

3. Fundamentos básicos

3.1. Tanto porciento

"Con el término porcentaje o tanto por ciento se conoce la proporcionalidad que se establece en relación con cada cien unidades. Consiste en relacionar una cantidad con respecto a 100 y se expresa con el símbolo %" (Mora, 2009).
El porciento de un número es la centésima parte de dicho número.

$$5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05 \qquad \textit{Entonces } 0{,}05 \textit{ es la centésima parte de } 5$$

El porcentaje se calcula mediante una regla de tres simple. Por ejemplo el 15% de 40 será:

40 $\longrightarrow$ 100%
X $\longrightarrow$ 15%

$$X = \frac{(40)(15)}{100} = 6$$

3.2. Aplicaciones del tanto porciento

Las aplicaciones más utilizadas para calcular con el porcentaje son: porcentaje sobre el precio de costo, porcentaje sobre el precio de venta, descuento por compra al contado y descuento por compra al contado con aplicación de impuestos.

- <u>*Porcentaje sobre el precio de costo*</u>

¿Cuál es el precio de venta de un producto, si el precio de costo es de $ 50,00 y del cual se desea obtener un beneficio del 8%?

<u>Datos</u>:

Precio de costo (PC) = $50
Utilidad o beneficio que se desea obtener (U) = 8% sobre el PC
Precio de venta (PV) = ¿?

$$\boldsymbol{PV = PC + U}$$
$$PV = \$50 + 8\%(50)$$

$$PV = \$50 + 4$$
$$PV = 54$$

- *Porcentaje sobre el precio de venta*

¿Cuál es el precio de venta de un producto, si el precio de costo es de $75 y se desea obtener una utilidad del 10% sobre el precio de venta?

Datos:

PC = $75
U = 10% sobre el precio de venta
PV = ¿?

$$\boldsymbol{PV = PC + U}$$
$$PV = PC + 10\%\ PV$$
$$PV = \$75 + 10\%\ PV$$
$$PV - 10\%\ PV = \$75$$
$$PV[1 - 10\%] = \$75$$
$$PV[1 - 0{,}1] = \$75$$
$$PV[0{,}9] = \$75$$
$$PV = \frac{\$75}{0{,}9}$$
$$PV = \$83{,}33$$

- *Descuento por compra al contado*

Calcular el precio final de un producto cuyo precio de catálogo es de $400, y sobre el cual se ofrece el 18% de descuento por compra al contado.

Procedimiento

Precio de catálogo	$400
18% descuento (0,18) ($400)	- $72
Precio final del producto	$328

- *Descuento por compra al contado con aplicación de impuestos*

¿Cuál es el precio final de un producto cuyo precio de catálogo es de $700, y sobre el cual se ofrece el 9% de descuento por compra al contado. El producto aplica el 12% de impuestos?

Procedimiento

Precio de catálogo	$700
9% descuento (0,09) ($700)	- $63
Precio con descuento	$637
12% impuestos (0,12) ($637)	+ $76,44
Precio final	$713,44

3.3. Logaritmos

El logaritmo de un número X con base b, es el número al que hay que elevar la base para obtener el número X

$$log_b X = N \leftrightarrow b^N = X$$

El capítulo de logaritmos es extenso, no obstante la aplicación para Matemáticas Financiera se limita al uso de 4 propiedades básicas:

- El logaritmo de un producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de dichos números

$$\log(A)\,(B) = \log(A) + \log(B)$$

- El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$log\frac{A}{B} = \log(A) - \log(B)$$

- El logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia.

$$logA^n = nlog(A)$$

- El cologaritmo de un número es igual al logaritmo de su recíproco; se expresa como "colog".
  Ejemplo: Calcular el valor de n de la siguiente ecuación: $(1 + 0{,}15)^n = 4{,}25$

$$log(1 + 0{,}15)^n = \log(4{,}25)$$
$$(n)log(1{,}15) = 0{,}6283889301$$
$$n(0{,}06069784035) = 0{,}6283889301$$
$$n = \frac{0{,}6283889301}{0{,}06069784035}$$
$$n = 10{,}3527$$

3.4. Progresiones aritméticas

Una progresión es aritmética, si cualquier término posterior se obtiene del anterior, sumando o restando un número constante llamado diferencia o distancia.
Ejm: 2, 4, 6, 8, 10, 12… La distancia se obtiene restando el número posterior del anterior, en este caso es 2 porque 10 – 8 = 2 o 6 – 4 = 2
Ecuaciones para el cálculo de progresiones aritméticas

Cálculo del último término de una progresión aritmética	$u = a + (n-1)d$	u = último término a = primer término
Cálculo de la suma de una progresión aritmética	$S = \frac{n}{2}(a+u)$	d = distancia n = número de términos S = suma de la progresión

3.5. Progresiones geométricas

Una progresión es geométrica, si cualquier término posterior se obtiene del anterior multiplicando o dividiendo por una cantidad constante llamada razón.
Ejm: 3, 9, 27, 81,… la razón se obtiene dividiendo el número posterior para el anterior, en este caso 27/9 =3 o 9/3, etc

Cálculo del último término de una progresión geométrica	$u = ar^{n-1}$	u = último término a = primer término r = razón n = número de términos S = suma de la progresión
Cálculo de la suma de una progresión aritmética	$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad r < 1$ $S = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad r > 1$	

Ejemplo: ¿Cuánto acumulará José si realiza depósitos mensuales durante 18 meses, sin incluir intereses, comenzando con $20 e incrementando $9 cada mes?

<u>Datos</u>:	Desarrollo:
n = 18	1) Se arma la progresión
a = $20	20, 29, 38, 47, 56…
d = $9	2) Se analiza que tipo de progresión es, en este caso corresponde a una
S = ¿?	progresión aritmética ya que la diferencia es constante.

3) Se observa los datos que se tiene disponibles para aplicar la ecuación de la suma de la progresión. En este caso se desconoce el último número. Se procede a calcular.

$$u = a + (n-1)d$$
$$u = \$20 + (18-1)\$9$$
$$u = \$173$$

4) Una vez calculado el último término se procede aplicar la ecuación de la suma de la progresión para calcular el total de la acumulación durante los 18 meses.

$$S = \frac{18}{2}(\$20 + \$173)$$

$$S = \$1737 \quad Obtendrá\ esta\ cantidad\ al\ finalizar\ los\ 18\ meses$$

4. Interés simple

4.1. Definición de interés simple

“Interés simple, es aquella forma de liquidar los intereses en la cual para su cálculo se toma como base únicamente el capital, ignorando los intereses liquidados y no pagados en periodos anteriores. Por lo tanto el valor del capital adeudado permanece constante” (Gutierrez, 2012).
El interés simple se calcula con la siguiente ecuación:

$$\boxed{I = Cit}$$

- ***Nomenclatura***

C = Es la cantidad de dinero inicial que se invierte o presta al inicio de una transacción.

i = Es la tasa de interés, que devenga al capital en la unidad de tiempo dada. Está dada en porcentaje o su equivalente.

t = Es el tiempo, en el cual el dinero se encuentra prestado o invertido y genera interés.

I = Es el interés simple, es la cantidad de dinero cobrado o pagado por el uso del capital durante todo el periodo.

Ejemplo: Calcular el interés simple que genera un capital de $3000 al 13% anual, en 2 años.

$$I = Cit$$
$$I = (\$3000)(\frac{0{,}13}{año})(2\ años)$$

$$I = \$780$$

4.2. Equivalencias de tiempo

Denominación	días	meses	Denominación	días	meses
Quincena	15	-	Cuatrimestre	120	4
Mes	30	1	Quimestre	150	5
Bimestre	60	2	Semestre	180	6
Trimestre	90	3	Año	360	12

Ejemplo: Calcular el interés simple que genera una capital de $2000 al 7% bimestral en 6 meses.

$$I = Cit$$
$$I = (\$2000)(\frac{0{,}07}{bimestre})(6\ meses)$$
$$I = (\$2000)(\frac{0{,}07}{bimestre})(6\ meses)\frac{1\ bimestre}{2\ meses}$$
$$I = \$420$$

4.3. Cálculo del monto a interés simple

Monto (M) es el valor final, obtenido en un futuro, está dado en unidades monetarias, es la suma del capital más los intereses generados en el transcurso del tiempo. Se calcula con la siguiente ecuación.

$$M = C + I$$
$$M = C + Cit$$
$$M = C(1 + it)$$

Ejemplo: Calcular el monto de un capital de $1000 al 2% mensual durante 150 días.

$$M = C(1 + it)$$
$$M = \$1000\left[1 + \left(\frac{0{,}02}{\cancel{mes}}\right)(150\cancel{días})\frac{1\ \cancel{mes}}{30\ \cancel{días}}\right]$$
$$M = \$1100$$

Ejemplo: Calcular el capital que se invirtió, si se conoce que al final se obtiene $12000, en 9 meses a una tasa de interés del 14% anual.

$$M = C(1 + it)$$
$$C = \frac{M}{(1 + it)}$$
$$C = \frac{\$12000}{1 + \left[(\frac{0{,}14}{año})(9mes)\frac{1\ año}{12\ mes}\right]}$$
$$C = \$10859{,}73$$

4.4. Cálculo del valor actual a interés simple

"El valor actual o valor presente de un documento o deuda es el capital calculado en una fecha anterior a la del vencimiento del documento, deuda o pago. Se representa con la letra VA" (Mora, 2009: 53).

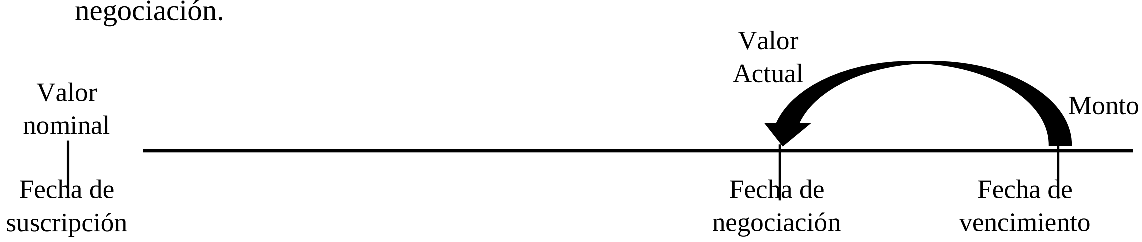
La ecuación del valor actual parte de la ecuación del monto a interés simple, donde se despeja C, pero ahora toma el nombre de valor actual (VA).

$$VA = \frac{M}{(1+it)}$$

- ***Gráfica de tiempo y valores***

La gráfica de tiempos y valores representa la cronología de las actividades financieras, se ubica al inicio la fecha de suscripción cuando se firma el documento y el valor nominal o inicial de inversión. Al final se ubica el monto o valor final y la fecha en la que termina o vence el documento. Entre la fecha de suscripción y final se ubica el valor actual, el cual es donde se negocia el documento, se ubica con la respectiva fecha de negociación.
Para calcular el valor actual se observa si se conoce previamente el monto o el capital, dependiendo del caso se sigue el siguiente proceso:

a) Si se conoce el capital: Primero se calcula el monto y de ahí se calcula el valor actual en la fecha de negociación.
b) Si se conoce el monto: Se calcula directamente el valor actual en la fecha de negociación.



Ejemplo: Se suscribe un documento de \$300, con un vencimiento en 6 meses, a una tasa de interés anual del 6% mensual. Se desea negociar para 60 días antes de su vencimiento, considerando una tasa de interés del 5% mensual, calcule el valor actual.

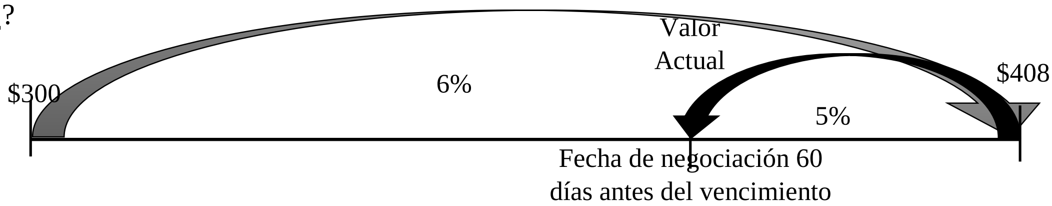
Datos:
C = \$300
t = 6 meses
i = 0,06% anual
i de negociación = 0,05% mensual
Fecha de negociación: 60 días antes del vencimiento.
VA= ¿?

Desarrollo:
Se debe aplicar el ítem a), ya que se conoce el capital. Se procede a calcular el monto.

$$M = C(1+it)$$

$$M = \$300(1 + \left(\frac{0,06}{mes}\right)(6mes))$$

$$M = \$408$$



Una vez calculado el monto se procede a calcular el valor actual 60 días antes del vencimiento.

$$VA = \frac{M}{(1+it)}$$

$$VA = \frac{\$408}{\left(1 + (\frac{0,05}{mes})(2\,mes)\right)}$$

$$VA = \$370{,}90$$

5. Interés compuesto

"En el interés compuesto el capital no es constante, sino que aumenta al final de cada periodo por la adición de los intereses ganados. El periodo para el cual se calculan los intereses se llama periodo de capitalización" (Kozikowski, 2007).

- ***Nomenclatura***

Periodo de capitalización (n).- Es el espacio de tiempo en el que el interés se acumula al capital. Este periodo puede ser anual, semestral, trimestral, mensual, etc. $n = \frac{No.\ total\ de\ meses}{12}$

Tasa de interés efectiva (i): La tasa de interés por periodo de capitalización. Cuando se habla de tasa de interés efectiva se asume que se capitaliza una sola vez al año y no se acostumbra a especificar que es efectiva.

Tasa de interés nominal (j): "El interés nominal es la tasa de interés que presenta las condiciones de liquidación de los intereses de un negocio" (Gutierrez, 2012). Se asume que es nominal cuando se utiliza la palabra capitalizable, es decir se capitaliza varias veces al año.

Tasa de interés continua (e_c): Se considera tasa continua cuando m tiende al infinito, es decir es tan pequeño el número de capitalizaciones que tiende al número de Euler (e) $e = 2{,}718281828$

Número de capitalizaciones al año (m): Se obtiene dividiendo 360 para el número de días del periodo de capitalización. $m = \frac{360}{No.días\ del\ periodo}$

5.1. Cálculo del monto a interés compuesto

Es el valor final o capital acumulado después de sucesivas adiciones de los intereses.

Monto con tasa efectiva	**Monto con tasa nominal**	**Monto con tasa continua**
$M = C(1+i)^n$	$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}$ t= tiempo. Debe estar expresado en años	$M = Ce^{jt}$

Ejemplo: Calcular el monto de un capital de \$4200 a interés compuesto durante 5 años, si la tasa de interés es del 7% capitalizable bimestralmente.

Datos:
C = \$4200
t = 5 años
j = 7% capitalizable bimestralmente
M = ¿?

$$m = \frac{360}{No.\,días\ del\ periodo}$$

$$m = \frac{360}{60\ días}$$

$$m = 6\ es\ decir\ un\ año\ tiene\ 6\ bimestres$$

Desarrollo:
Se aplica la ecuación de monto con tasa nominal

$$M = C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}$$

$$M = \$4200\left(1+\frac{0{,}07}{6}\right)^{(6)(5)}$$

$$M = \$5948{,}02$$

5.2. Tasas equivalentes

"Se dice que dos tasas anuales de intereses con diferentes periodos de conversión o capitalización son equivalentes si producen el mismo interés compuesto al final de una año" (Ayres, 1970).

Tasas Equivalentes

Efectiva - Nominal	Nominal - Nominal	Efectiva - Continua	Nominal - Continua
$(1+i)=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$	$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$	$(1+i)=e^{i_c}$	$\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}=e^{i_c}$

Ejemplo: Calcular la tasa efectiva de interés equivalente a una tasa nominal del 15% anual capitalizable trimestralmente.
Se escoge la ecuación equivalente efectiva-nominal, se procede de la siguiente manera:

$$(1+i)=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}$$

$$m=\frac{360}{90}$$
$$m=4$$

$$(1+i)=\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{4}$$
$$(1+i)=1,158650415$$
$$i=15,8650\%$$

5.3. Valor actual a interés compuesto

"El valor actual (VA) a interés compuesto es el valor de un documento, bien o deuda, antes de la fecha de su vencimiento, considerando determinada tasa de interés" (Mora, 2009)
De igual manera que el interés simple, el valor actual se obtiene de la ecuación del monto a interés compuesto, donde se despeja el capital que ahora se describe con las siglas VA.

Valor actual a interés compuesto

Tasa efectiva	Tasa nominal	Tasa continua
$VA=\frac{M}{(1+i)^{n}}$	$VA=M\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}$	$C=Me^{-jt}$

Ejemplo: ¿Cuál es el valor actual de un documento cuyo valor nominal es de $3000 a 6 años de plazo con el 4% de interés anual, capitalizable semestralmente, desde su suscripción, si se vende dos años antes de la fecha de vencimiento, considerando una tasa del 5% capitalizable semestralmente?

Datos:
VA=?
C = $3000
t = 6 años
j= 4% cap. Semestral
t2= 2 años antes del vencimiento
j2= 5% cap. Semestral
m= 2

Una vez calculado el monto se procede a calcular el valor actual

Desarrollo:
Se calcula primero el monto

$$M=C\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}$$
$$M=\$3000\left(1+\frac{0,04}{2}\right)^{(2)(6)}$$
$$M=\$3804,72$$

$$VA=M\left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}$$

$$VA = \$3804{,}72\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{-(2)(2)}$$
$$VA = 3446{,}88$$

6. Anualidades o rentas

"Una anualidad es una serie de pagos periódicos iguales" (Portus, 1975).
"El valor de cada pago periódico recibe el nombre de renta o simplemente, anualidad" (Moore, 1973).

6.1. Clasificación de las anualidades o rentas

Las anualidades se clasifican según como se indica en el siguiente esquema:
Anualidades

Tipo de anualidad según:	Anualidad	Definición
Tiempo	Eventuales o contingentes	Aquellas en las que el comienzo y el fin de la serie de pagos o depósitos son imprevistos y dependen de algunos acontecimientos externos. Ejm: robos, incendios, etc.
	Ciertas	La fechas inicial y terminal se conocen por estar establecidas en forma concreta, como son la cuotas de préstamos hipotecarios o quirografarios, etc.
Forma de pago	Ordinarias o vencidas	El depósito, pago o renta y la liquidación de intereses se realizan al final de cada periodo.
	Anticipadas	El depósito, pago y la liquidación de los intereses se hacen al principio de cada periodo: pago de cuotas por adelantado.
	Diferidas	Son aquellas cuyo plazo comienza después de transcurrido determinado intervalo del tiempo establecido: préstamos con meses de gracia.
	Simples	El periodo de pago o depósito coincide con el periodo de capitalización.
	Generales	Los periodos de pago o depósito y de capitalización no coinciden.

Adaptado de Mora, 2009

Bibliografía

Achign, C. (02 de 02 de 2015). *FreeLibros.org*. Obtenido de http://www.adizesca.com/site/assets/me-matematicas_financieras_para_toma_de_decisiones_empresariales-ca.pdf

Ayres, F. (1970). *Matemáticas Financieras: Teoría y 500 problemas resueltos.* Bogotá: McGraw-Hill.

Gutierrez, J. (2012). *Matemáticas Financieras.* Colombia: Ecoe Ediciones.

Kozikowski, Z. (2007). *Matemáticas Financieras: El valor del dinero en el tiempo.* México: McGraw-Hill.

Moore. (1973). *Manual de Matemáticas Financieras.* México: Uteha.

Mora, A. (2009). *Matemáticas Financieras.* México: Alfaomega.

Portus, G. (1975). *Matemáticas Financieras.* Bogotá: McGraw-Hill.